Offenbar ist $g_R + M$ A_Ω-minimal in $\mathrm{Lip}_R(\Omega, \psi + M)$.

Gemäß $\psi + M \geq \varphi$ auf $\partial\Omega$ folgt aus dem Bisherigen

$$f_R \leq g_R + M \implies$$

$$f_R - g_R \leq \sup_{\partial\Omega} |\varphi - \psi|.$$

Analog beweist man $f_R - g_R \geq -M$.

iii) Sei $g \in \mathrm{Lip}_R(\Omega, \varphi)$. Dann ist nach Gauß

$$\frac{d}{dt|0} A_\Omega(f + t(g-f)) = \int_\Omega \frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \cdot \nabla(g-f)\, dx =$$

$$\int_\Omega -\operatorname{div} \frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \cdot (g-f)\, dx = 0,$$

d.h. die konvexe Funktion $t \longrightarrow A_\Omega(f + t(g-f))$ hat einen kritischen Punkt bei $t = 0$. Dann liegt in $t = 0$ eine Minimalstelle vor, also

$$A_\Omega(f) \leq A_\Omega(g),$$

mithin $f = f_R$ wegen der Eindeutigkeit des Minimums f_R.

∎

Wie bereits gesagt sind die Funktionen f_R keine Flächen kleinsten Inhalts zu fixierten Randwerten φ, denn der Gradient der Minimalfläche könnte ja größer als R ausfallen. Wenn man aber geometrische Bedingungen an Ω und die Randwerte φ finden kann, die apriori eine Lipschitz Bedingung $\operatorname{Lip}(f) \leq K$ für die Fläche kleinsten Inhalts erwarten lassen, so wird man hoffen dürfen, daß f_R mit $R > K$ tatsächlich kleinsten Inhalt unter allen Lipschitz-Flächen mit Randwerten φ hat. Solche Bedingungen an Ω und φ werden wir jetzt beschreiben.

III. Die "bounded slope condition" für Ω, φ

Wie bisher sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes konvexes Gebiet und $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ eine Randfunktion. Dann interessiert uns die zugehörige

$$\text{Randmannigfaltigkeit} \qquad \Gamma := \{(z, \varphi(z)) \;:\; z \in \partial\Omega\},$$

also einfach der Graph von φ.

DEFINITION: Die Randmannigfaltigkeit Γ erfüllt eine bounded slope condition (= beschränkte Steigung) mit Konstante $K \geq 0$, wenn folgendes gilt:

Zu jedem Punkt $p = (x_0, \varphi(x_0)) \in \Gamma$ gibt es affin lineare Funktionen

$$L_p^{\pm} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

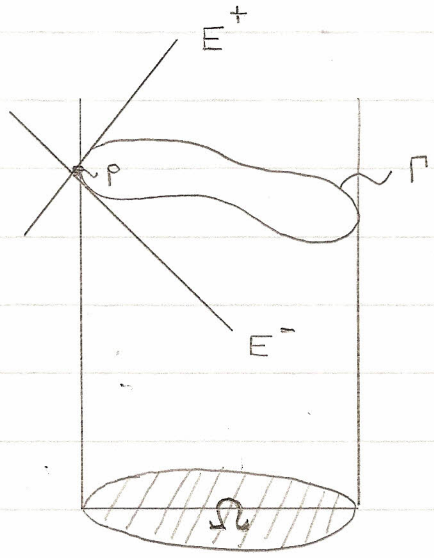
$$L_p^{\pm}(x) = a^{\pm} \cdot (x - x_0) + \varphi(x_0), \qquad a^{\pm} \in \mathbb{R}^n$$

von p abhängig mit

$$(i) \qquad L_p^-(x) \leq \varphi(x) \leq L_p^+(x), \quad x \in \partial\Omega,$$

(ii) $\quad |a^{\pm}| \leq K.$

Was sagt die B. S. C. anschaulich?



Fixiert man einen beliebigen Punkt $p \in \Gamma$, $p = (x_0, \varphi(x_0))$, so findet man dazu zwei nicht vertikale Hyperebenen E^+, E^- (also Graphen über $\mathbb{R}^n$!), deren Steigung einerseits durch die vorgegebene Konstante K beschränkt ist, den Punkt p enthalten und andererseits die Randmannigfaltigkeit Γ in das keilförmige Gebiet $\mathcal{G}$ einschließen, das aus dem Durchschnitt all der Punkte in $\mathbb{R}^{n+1}$ besteht, die gleichzeitig unterhalb der Ebene E^+ und oberhalb der Ebene E^- liegen.

<u>BEMERKUNGEN:</u> (vgl. Gilbarg & Trudinger, 2nd ed, p. 309 ff)

① Hartman [Pacific J. Math. 18 (1966)] zeigte folgende Aussage:

Sind φ und $\partial\Omega$ von der Klasse C^2, und ist Ω uniform konvex, d.h. läßt sich von innen eine Kugel mit festem Radius an jeden Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ legen, die $\partial\Omega$ genau nur in x_0 berührt, so erfüllt Γ die B. S. C. mit einer Konstanten K, die durch die Krümmungen von $\partial\Omega$ und durch Schranken auf die 1ten und 2ten Ableitungen von φ bestimmt wird.

Anders formuliert: Ist Ω ein vernünftiges konvexes Gebiet, also z.B. eine Kugel in $\mathbb{R}^n$ (Kreisscheibe im 2-dim. Fall), und ist die Randfunktion $\mathcal{J}$ regulär, so kann aus diesen Daten stets eine Konstante $K \geq 0$ ausrechnen, für die die B.S.C. erfüllt ist.

② Uns interessieren in dieser Vorlesung die "klassischen Minimalflächen" im $\mathbb{R}^3$, also der Fall, wo das Parametergebiet Ω in der Ebene liegt. Haar formulierte in seiner Arbeit [Math. Ann. 97 (1927)] die

<u>3-Punkte Bedingung</u>: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und konvex. Die Randmannigfaltigkeit Γ erfüllt die 3-Punkte Bedingung mit Konstante K, wenn man durch drei beliebig vorgegebene verschiedene Punkte aus Γ eine Ebene E legen kann, deren Steigung durch K beschränkt ist.

Es gilt (vgl. Gilbarg & Trudinger, 2nd ed, p. 314):

> Im Fall $n=2$ sind die B.S.C. und die 3-Punkte Bedingung zueinander äquivalent, die Konstanten sind jeweils gleich.

Wir kommen jetzt zur Diskussion des Variationsproblems

$A_\Omega(\cdot) \to \mathrm{Min}$

bei vorgegebener Randfunktion $\mathcal{J} : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ in geeigneten

Klassen von Lipschitz Funktionen $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$. Dabei nehmen wir an:

i) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist beschränkt und konvex

ii) $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz stetig, also

$$|\varphi(x) - \varphi(z)| \leq c \cdot |x-z|$$

für alle $x, z \in \partial\Omega$ mit einer Konstanten $c > 0$.

iii) Die Randmannigfaltigkeit genügt der B.S.C. mit Konstante K.

Dabei können wir o.E. annehmen, daß

$$K = c$$

{ Aus B.S.C. mit Konstante K folgt sofort $|\varphi(x)-\varphi(y)| \leq K\,|x-y|$ für $x, y \in \partial\Omega$.

gilt, sonst setze man beide Konstanten durch $\max(K, c)$. Außerdem bedeutet es keinerlei Einschränkung, φ als Lipschitz mit Konstante K auf $\overline{\Omega}$ vorauszusetzen, denn es gilt der

Satz v. Kirszbraun : ([Feder], p.201)

Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ beliebig und $f : M \to \mathbb{R}^l$ Lipschitz, so gibt es eine Lipschitz Abbildung $\overline{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ mit $\overline{f}|_M = f$ und $\mathrm{Lip}(\overline{f}) = \mathrm{Lip}(f)$.

Das heißt: Man kann jede Lipschitz Abbildung unter Erhaltung der Lipschitz Konstanten auf den ganzen Raum fortsetzen. Für $l = 1$ ist das eine Übungsaufgabe, in höher dimensionalen Bildräumen argumentiert man mit dem Lemma von Zorn.